6/10/2015

## Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{n\text{-φορές}} = \{x=(x_1,\dots x_n) / x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)=(y_1,y_2,\dots,y_n) \iff x_1=y_1,\ \dots\ x_n=y_n$$

Ο $\mathbb{R}^n$ έχει δομή διανυσματικού χώρου με πράξεις:

$+ : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (x,y)\mapsto x+y$

$$\left.\begin{array}{l} x=(x_1,\dots,x_n) \\ y=(y_1,\dots,y_n) \end{array}\right\} x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

και

$\cdot : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (\lambda,x)\mapsto \lambda x$

$\lambda x = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$

$\dim\mathbb{R}^n = n$. Μια βαση του $\mathbb{R}^n$ ειναι η $\{e_1=(1,0,\dots,0), e_2=(0,1,0,\dots,0)\dots$
$e_n=(0,0,\dots,1)\}$

καλειται συνηθης βαση $x=(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

## Σύνηθες εσωτερικό γινόμενο

Ορισμος: Το συνηθες εσωτερικό γινόμενο είναι η απεικόνιση

$\langle\,,\rangle\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \quad (x,y)\mapsto \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1+x_2y_2+\dots x_ny_n$

$x=(x_1,\dots,x_n)$
$y=(y_1,\dots,y_n)$

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

- $< x, y > = < y, x >$
- $< x+y, z > = < x, z > + < y, z >$
- $< x, x > \geq 0$ επιπλεον $< x, x > = 0 \iff x = 0$

Μηκος διανύσματος: $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$

Ανισότητα Cauchy-Swartz: $| < x, y > | \leq \| x \| \| y \|$

η ισότητα ισχύει αν τα x & y ειναι γρ. ανεξαρτητα.

Τριγωνική Ανισότητα (Ανισότητα Minkoski): $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$

**Ιδιότητες μήκους:**

$\| x \| \geq 0$ , $\| x \| = 0 \iff x = 0$

$\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$.

Καθετα (ή ορθογώνια) διανύσματα.

Ορισμος: Τα διανυσματα x, y καλουνται καθετα αν και μονο αν $< x, y > = 0$.

**Πχ** $< e_i, e_j > = \delta_{ij}$

Μια βαση $\{u_1, \dots, u_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ καλειται ορθομοναδιαια αν και μονο αν $< u_i, u_j > = \delta_{ij}$.

## Γωνία μη μηδενικών διανυσμάτων

$x \neq 0$, $y \neq 0$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. $\left| \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right| \leq 1 \Rightarrow$ υπαρχει μοναδικό

$\theta \in [0, \pi]$ ωστε $\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$. Ο αριθμος $\theta$ καλειται γωνια των

$x, y$.

$x \neq 0$, $y \neq 0$, $x, y$ καθετα $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Προσοχη Λαθος!:

$$\left.\begin{array}{r} x \cdot y = 0 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \quad \times$$

## Ευκλείδια απόσταση:

Ορισμος: Καλούμε Ευκλείδια απόσταση των συναρτήσεων
$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$

$$\begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{array} \Bigg| \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Ιδιότητες:
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \geq 0$ και $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

# Ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Καλούμε ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ κάθε απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που πληροί την ιδιότητα:

$d(T(x), T(y)) = d(x,y) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

1) Παράλληλες μεταφορές του $\mathbb{R}^n$:

Ορισμός: Καλούμε παράλληλη μεταφορά κατά $u \in \mathbb{R}^n$ την απεικόνιση $T_u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T_u(p) = p + u$

$d(T_u(x), T_u(y)) = \| T_u(x) - T_u(y) \| = \| (x+u) - (y+u) \| = \| x-y \| = d(x,y)$

$T_u(0) = u$

Η απεικόνιση T είναι γραμμική μόνο όταν $u=0$.

$T_u \circ T_w = T_{u+w} \qquad = T_w \circ T_u \quad \forall\, x, w \in \mathbb{R}^n$

Ειδικά:

$T_u \circ T_v = T_0 = Id = T_{-u} \circ T_v \Rightarrow \exists\, T^{-1} = T_{-v}$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ισομετρία. Είναι η T 1-1?

$T(x) = T(y) \Rightarrow d(T(x), T(y)) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

2) Μια γραμμική απεικόνιση $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται ορθογώνιος μετασχηματισμός αν-ν $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$.

$Ax = A(x)$

$d(Ax, Ay) = \| Ax - Ay \| = \| A(x-y) \| = \sqrt{\langle A(x-y), A(x-y) \rangle} = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$
$= \| x-y \| = d(x,y)$.

Συμπέρασμα: Κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός είναι ισομετρία του $\mathbb{R}^n$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Συμβολισμός: $Isom(\mathbb{R}^n)$ = σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$

$O(n)$ = σύνολο των ορθογωνίων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρησεις:

1) $T, S \in Isom(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T \circ S \in Isom(\mathbb{R}^n)$

$d(T \circ S(x), T \circ S(y)) = d(T(S(x)), T(S(y))) = d(S(x), S(y)) = d(x,y)$

2) $Id \in Isom(\mathbb{R}^n)$

3) $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ και $\exists T^{-1} \Rightarrow T^{-1} \in Isom(\mathbb{R}^n)$

Αποδειξη:

$d(T(x), T(y)) = d(\tilde{x}, \tilde{y}) \ \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$

$\tilde{x} = T^{-1}(x), \ \tilde{y} = T^{-1}(y)$

$d(x,y) = d(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Θεώρημα: Καθε ισομετρία $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ γράφεται ως εξης:
$T = T_u \circ A$, οπου $T_u$ παραλληλη μεταφορα και $A \in O(n)$

Γεωμετρική ισοτιμία

Ορισμος: Το σχημα $\Sigma$ (δηλ. $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$) καλειται γεωμερική ισοτημια του σχηματος $\tilde{\Sigma}$ αν_ν υπαρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ ωστε $T(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$

Παρατηρησεις:

1) Καθε $\Sigma$ ειναι γεωμετρικά ισοτιμο με τον εαυτό του

2) Αν $\Sigma$ γεωμ. ισοτιμο με $\tilde{\Sigma} \Rightarrow \tilde{\Sigma}$ ισοτιμο με $\Sigma$

3) Αν $\Sigma$ γεωμ. ισοτιμο με $\Sigma_1 \Rightarrow \exists T \in Isom(\mathbb{R}^n) : T(\Sigma) = \Sigma_1$

κ' $\Sigma_1$ -//- -//- με $\Sigma_2 \Rightarrow \exists S \in Isom(\mathbb{R}^n) : S(\Sigma_1) = \Sigma_2$

$$\left.\begin{array}{l} S \circ T(\Sigma) = \Sigma_2 \\ S \circ T \in Isom(\mathbb{R}^n) \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \text{ γεωμ. ισοτιμο με } \Sigma_2$$

## Ισομετρία του $\mathbb{R}^2$

1) παράλληλες μεταφορές

2) Ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$.

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad e_1=(1,0)$ $\quad e_2=(0,1)$

$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ πινακας του A ως προς $\{e_1, e_2\}$.

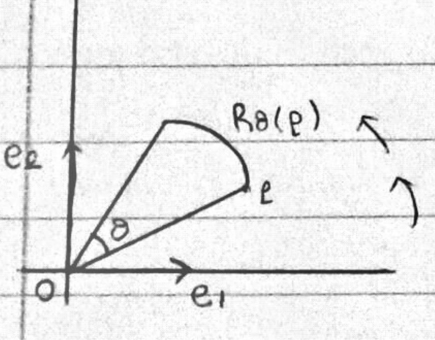
Ο A είναι ορθογώνιος $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιος.

Καθε $2\times2$ ορθογώνιος πινακας είναι της μορφής:

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \det = +1$ $\qquad$ $\hookrightarrow \det = -1$

Στροφη κατα γωνια φ δηλαδή είναι ο πινακας του γραμμικού μετασχηματισμού $R_\theta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.




Παριστα γραμμικο μετασχηματισμό καθ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ο οποιος είναι κατοπτρισμος ως προς ευθεία ℓ που περνα απο το (0,0) και σχηματιζει γωνια $\theta/2$ με Ox.